『Retirement Income Recipes in R』 要約資料

# Setting Expectations and Deviations

本全体の概要と各章の要約を記載．

## The Big Idea in the Book

重要な確率変数2つを定義．

：余命（Human Longevity），年齢以外にも依存するがいったん明記しない．

：資産の寿命（Portfolio Longevity），は支出率

⇒ となるRecipesを開発することが目的（実際には期待値や確率を比較すること

## Outline of the Book

|  |  |
| --- | --- |
| 章 | 概要 |
| 2 | RおよびRstudioのインストール，簡単な使い方 |
| 3 | 簡単な消費と貯蓄のライフサイクルモデルをRで実装 |
| 4 | 3章のライフサイクルモデルを使用して個人BSをRで操作してみる |
| 5 | ポートフォリオの寿命の定義，収益率のモンテカルロシミュレーション |
| 6 | ポートフォリオの寿命がreturns effctにどのような影響を受けるか |
| 7 | 離散時間で余命モデル化について考え，Human Mortality Databaseのデータを紹介 |
| 8 | 連続時間でよく知られた死亡率の法則(ベンジャミンゴンぺルツ)を紹介．のモーメント(cdf,pdf)を計算．7，8章がこの本と他の本との差別化されている点 |
| 9 | とを使用してlifetime ruin probability()を計算するためのシミュレーションベースのアルゴリズムを紹介．実務ではは人気だがその落とし穴も紹介 |
| 10 | 長寿派生証券のようなoutliving wealthのリスクを保障する金融商品に焦点．  長寿派生証券のpayoutと余命には正の相関があるので，ポートフォリオの寿命を伸ばす．  mortality creditsのアイディアとそれがポートフォリオ収益率を高めることを紹介 |
| 11 | 動的な支出率を計算するアルゴリズムを紹介（10章までは外生的に与えていたが，内在的に考える）  (1)リスク回避選考に基づいて支出率を決定．(2)実現した寿命と収益率に関する変数に応じて支出率を調整 |
| 12 | 政府や企業などによるDB年金制度の経済的根拠，メリットを紹介  11,12章は実際の収入戦略に焦点を当てているので最も実用的な章 |
| 13 | 死亡率の不均一性を深く掘り下げ，退職後のプランニングに重要であることを示す |
| 14 | 変額年金などエキゾチックな年金を紹介，評価 |
| 15 | 結論 |

## How to Teach with the Book

授業での使い方（関係なし，無視してよし）

# Loading and Getting to Know R

Rの使い方が基本なので無視してよし

# Coding the (Simple) Financial Life-Cycle Model

所得税や既存の年金はなく．投資収益，給与，死亡率は確定的としてモデル化し，最適な消費率，退職時に必要な最適な金融資本を求める

## Functions Used and Defined

## A Quick of the Model

financial planningアプローチ（実務）とこの本のfinancial life-cycleアプローチの違いを主張

* 記号の定義

：期間

：賃金$，期末に発生

：消費$，期末に発生

：定年年齢

：寿命

：評価率，割引率

* 計算する項目

：最適な消費額

：最適な貯蓄率，

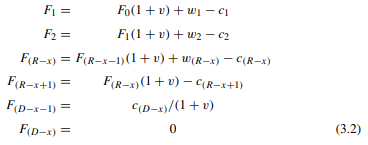
：最適な富の量

：退職後の最適な消費率

## Human Capital vs. Financial Capital Over Time

人的資本と金融資本を定義





## Solving for Optimal Consumption：

最適な消費額（一定）を算出



## Coding Up the Smooth Consumption Rate

3.4の内容をRコードで実装

## An Optimal Savings Rate Depends on Age

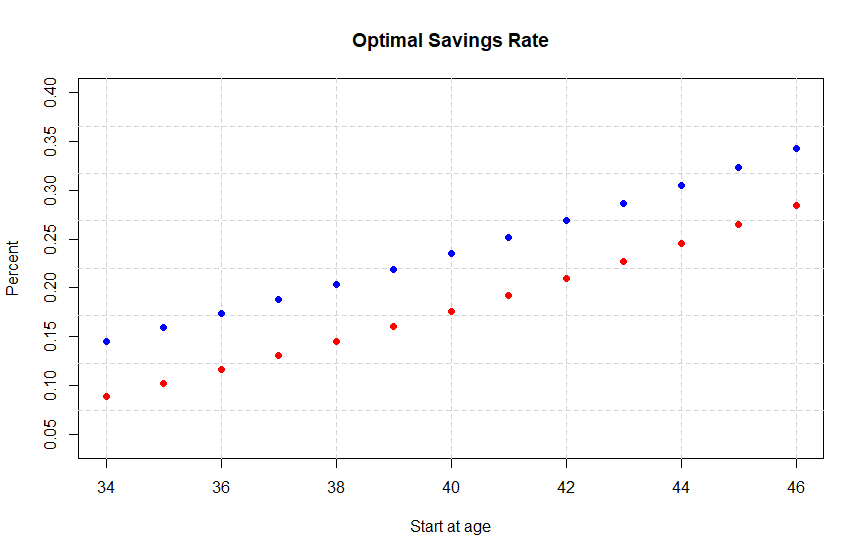
貯蓄額ではなく，貯蓄率を確認．

ポイントは2点．①貯蓄を始めるのが早いほど必要な貯蓄率は低下②貯蓄率は評価率（実行金利）に対して非常に敏感

## Visualizing the Savings Rate

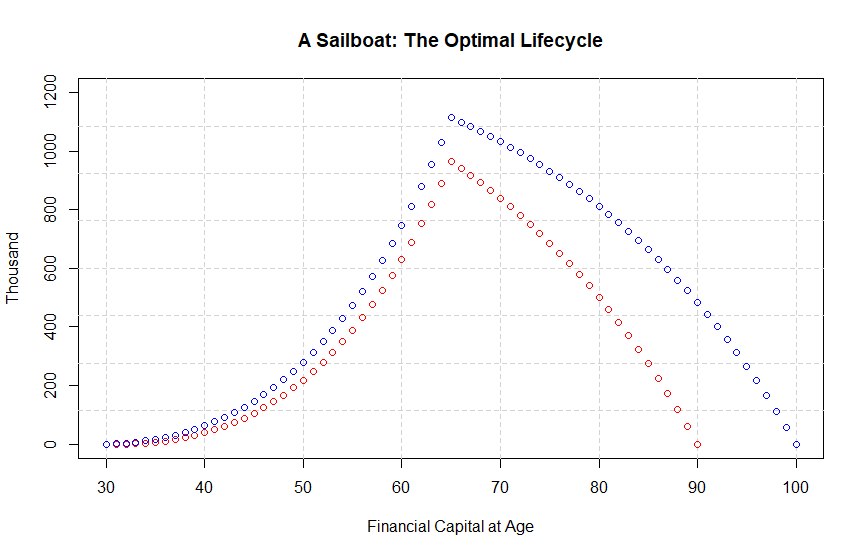
さまざまな年齢で貯蓄を開始した場合に貯蓄する必要がある給与の割合をplot

遅くなるほど多く貯蓄する必要がある．



## Optimal Trajectory of Your Financial Capital

各年齢で持つべき金融資本をプロット



## Optimal Financial Capital as a Multiple of Wages

各年齢で持つべき金融資本が給与の何倍か計算

## Pushing the Analytics Furthe

3.9の分析を詳しく

現在の給与単位当たりの式を算出し確認

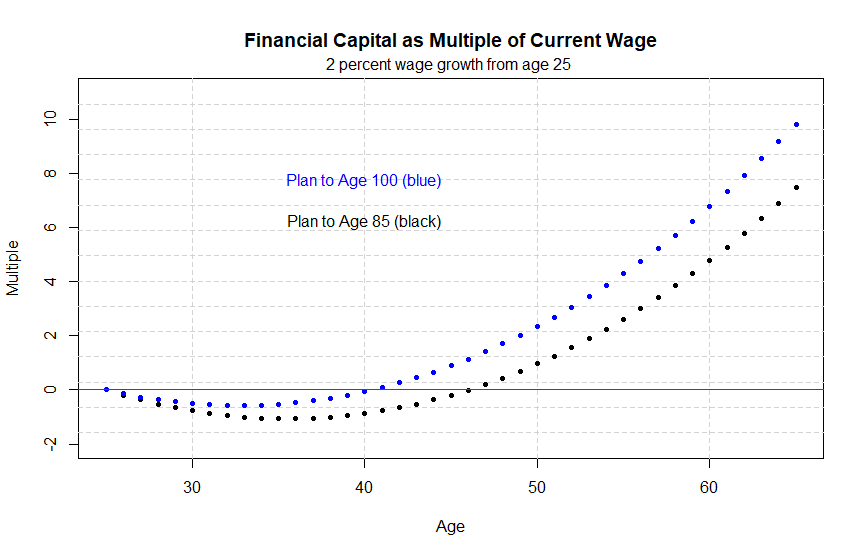


## A Cleaner Financial Target: Wage Multiples

必要な金融資本が現在の賃金の何倍か計算する関数を定義

## Debt: The Meaning of Negative Numbers

金融資本が負になる意味（借金）を確認



## A Stake in the Ground with Some Estimates

章の終わりに様々な退職年齢における最適な結果を求めている

## Final Notes

・3章の内容は非常に抽象化されたものであり，消費の最適化についてどのように考えるかの設定をすることにある

・3章では年金についても考えていないので，後にその点も示す

・仮定はあったが，4章では個人の健全なバランスシートに対するベンチマークとしてこれらを使用する．

# Data in R: The Family Balance Sheet

Rstudio内でデータセットをインポートして分析する方法を学ぶ

## Functions in This chapter

## Importing the Family (Personal) Balance Sheet Data

データセットを取得し，中身を確認

## Exploring Your Data in R

Rを使用してデータを操作する関数を試してみる．range,mean,length

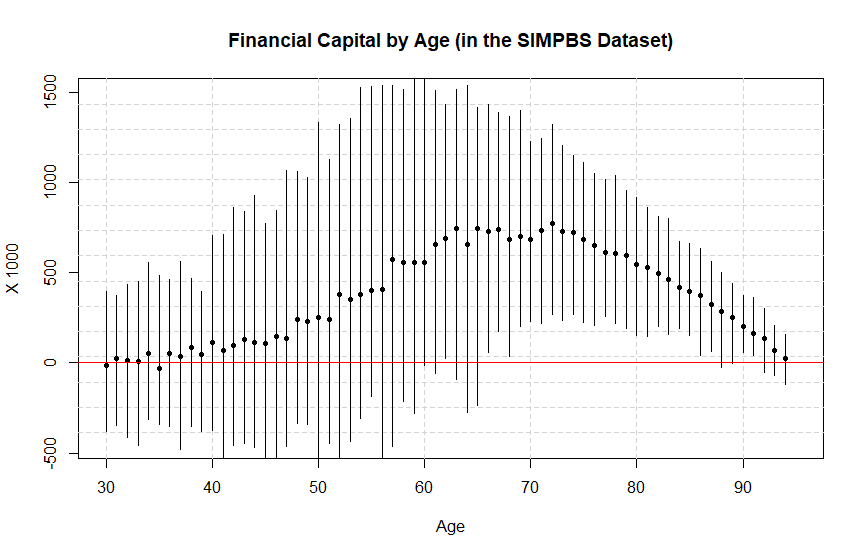
## Measuring Simple Correlations

相関係数の計算．退職時までは年齢と金融資本は正の相関．高齢者だと負の相関

## Plotting the Data

データを可視化して確認する

年齢ごとの金融資本の最小，平均，最大をplot



## Are These Households on Track for Retirement?

実際のデータとライフサイクルモデルにおける理論値の比較

## Final Notes

・データは仮想データ（ランダムな年齢，年収，退職日から最適な消費量，金融資本を求めノイズを加えて作成している

・実際のデータは欠損値，一貫性のなさ，金融資本の主観的評価等があり，処理する必要がある等難しい．実際にはインプットではない，不確実なパラがたくさん．

・この章がR練習の最後

# Portfolio Longevity: Deterministic and Stochastic

・ポートフォリオの寿命について，リターンのモンテカルロシミュレーションの方法と資産配分の関係を説明

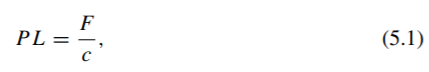
・4%ルールについて分析

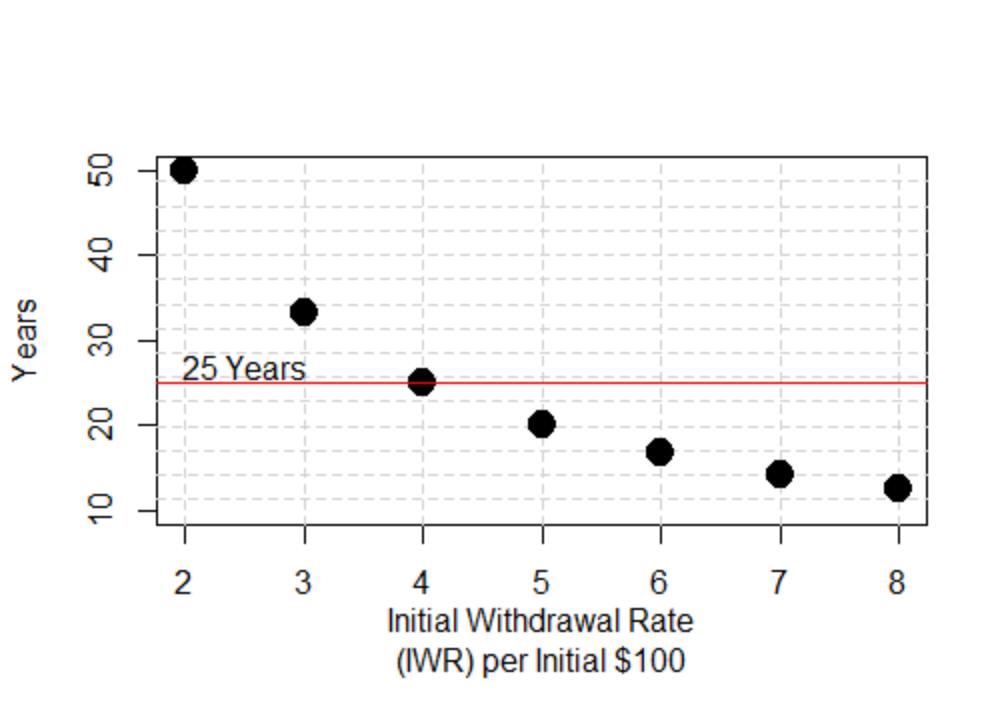
## Functions Used and Defined

## Constant Spending Is (Only) a Good Start

## Portfolio Longevity: Under the Mattress

におけるポートフォリオの寿命（PL，portfolio longevity）を定義（逆数はinitial withdrawal rate IWR）





## Portfolio Longevity: Fixed Interest Rates

におけるポートフォリオの寿命は下記方程式を満たす．証明は次の章．Rで実装．



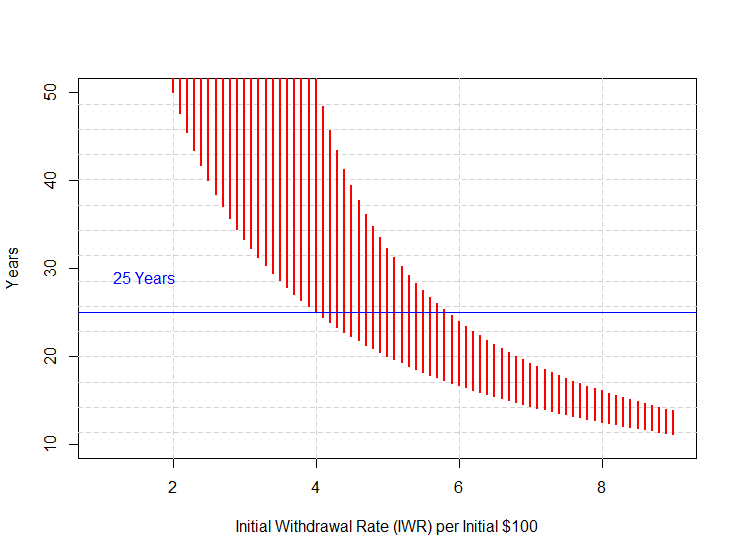
評価率（ポートフォリオリターン）の水準によってポートフォリオの寿命は大きく変化．消費を全てリターンで賄うことができれば無限大になる．

投資収益率が負（インフレ調整後のリターンが負）の場合についても検討

## Plotting the Cone of Portfolio Longevity

X軸を初期引き出し率(c/F)，縦軸をPLとして，評価率vを様々な値でプロットしてみる．

・初期引き出し率が小さいほど，評価率の影響が大きくなる．



## Early Calculus: Deriving the PL Formula

連続で閉じた形での(5.2)式の証明の足掛かり．

ポートフォリオの寿命=消費の系列現在価値なので，



変形↓（の場合のみ）



偏微分は下記で，であれば負



## Initial Withdrawal Rate vs. Ongoing Withdrawal Rate

初期の引き出し率と途中の引き出し率は違いますよ．

違いを理解するため，ポートフォリオの微分方程式を考える．

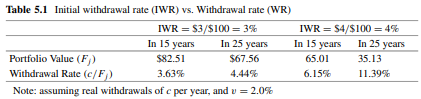
ポートフォリオは増分でだけ増加し，減少するので



これは解析的に解くことができて



これを使用して計算してみると，下記になりIWRとWRは異なることがわかる．その結果4%ルール（初期資本の4%を固定で消費し続ける）を続けると25年後には11.39%もの額を引き出すことになる．



## Life is Random: Simulating Portfolio Longevity

　これまで，評価率は確定的だったが，実際には確率的に変動するため，消費だけでなくポートフォリオの寿命が尽きる可能性がある．そのため，正確な日付はわからないが，モンテカルロシミュレーションによって統計的に分布を推測することは可能．

ポートフォリオの寿命をシミュレーションする方法は2種類存在．

1. 十分に長いヒストリカルデータに対してブートストラップ等を適用
2. 収益率分布について経済的に尤もらしい分布を仮定し，カリブレーション．その分布から乱数生成

⇒ ②を採用．理由としては，

・①は過去の値に依存する．例えば現状の金利が0%だとしても，過去に30%を記録すれば1/Nで30%を記録する．

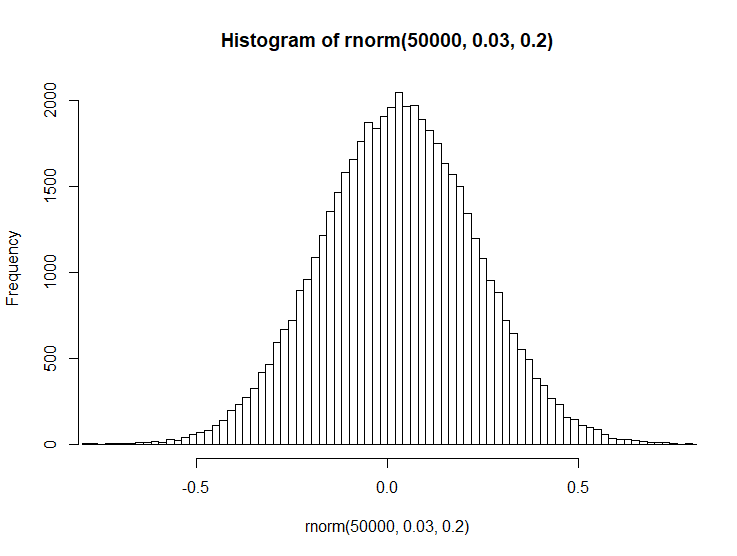
・②では単純化する仮定があれば解析解が導出可能

## Normal Number

正規分布に従う乱数を生成しているだけ

## A Histogram of Investment Returns

ヒストグラムを描いているだけ



## Simulation Algorithm for Portfolio Longevity

ポートフォリオの寿命を以下のアルゴリズムでシミュレーションする．

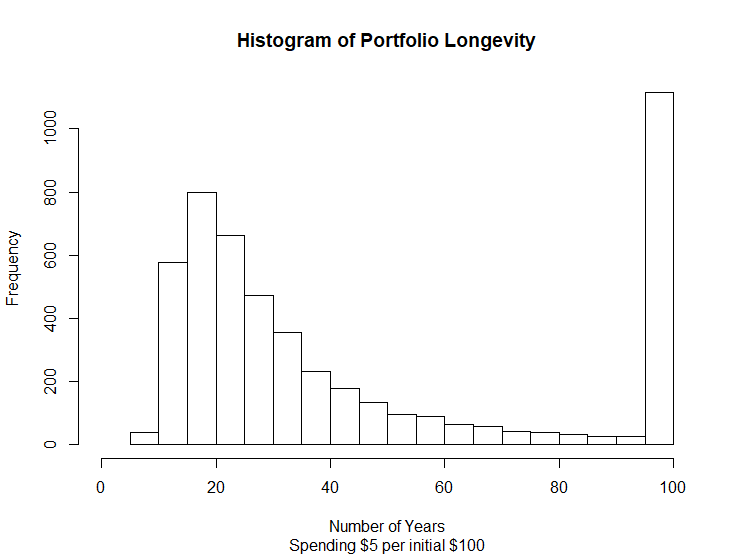
1. 金融資本，初期引き出し率とする
2. 1年間の連続複利収益率をシミュレーションする（正規分布）
3. 2期の金融資本，を計算（引き出しは期末）
4. 同様にをシミュレーションし，3期の金融資本を計算
5. 一般的表現で，をシミュレーションする（ポートフォリオが生存する限り）
6. で終了し，とする
7. ①～⑥を繰り返し，を計算する

## The First Visit to Monte Carlo

ポートフォリオの寿命PLをシミュレーションしてみる．

・投資収益率が確率的に変動するので，退職後の収入計画と最適な引出し戦略は複雑な問題になる．

・平均値は外れ値の影響を受けている．ヒストグラムは下記



## Retirement Income Insights

5.12の結果の通り，PLは小さいか極端に大きな値かを取る．そして，消費率が小さいほどPLは大きくなる．

## Final Notes: The Infamous 4% Rule

この章のコードでいろいろなシミュレーションができ，平均と標準偏差を年齢ごとに変えることも可能，cの値を年齢ごとに変えることも可能（後の章でをの関数で記述する，実際人は投資がうまくいったかで消費を変更する．），

・この章での結果は消費が期末に起きると仮定しているので，発生時点を期始や期央にも変更でき，結果は大きく変わる

・この章では年単位でシミュレーションしたが，実際には月単位でシミュレーションすべき

・この章では投資収益率として正規分布を仮定したが，当然ほかの分布も可能

・フォワードルッキングの分布を仮定したくない場合には過去のデータからサンプリングすることも可能（sample関数）

# Modeling the Risk of Sequence-of-Returns

・the sequence-of-returns effectに焦点を当てる（

・プットとコールによってヘッジする戦略の分析を行う

## Functions Used and Defined

## Modifying the Portfolio Longevity Simulation

リターンがPLに与える影響を深堀する．

最初の10年間の幾何平均を3期間保存し，PLとの関係を確認するための関数を定義

## A First Look at Sequence-of-Returns (SoR)

6.2で定義した関数で分析してみる．

PLは最初の10年間のリターンに対する感度が大きく，これをsequence-of-returns effectと呼ぶ．

数学的に簡単に示すと，



が成り立つとき，Sequence XY – Sequence YXを計算するととなり正になる．

## Correlations as a Measure of SoR Risk

10パスでは十分ではないため，50,000パス生成し，統計的検定を行う．

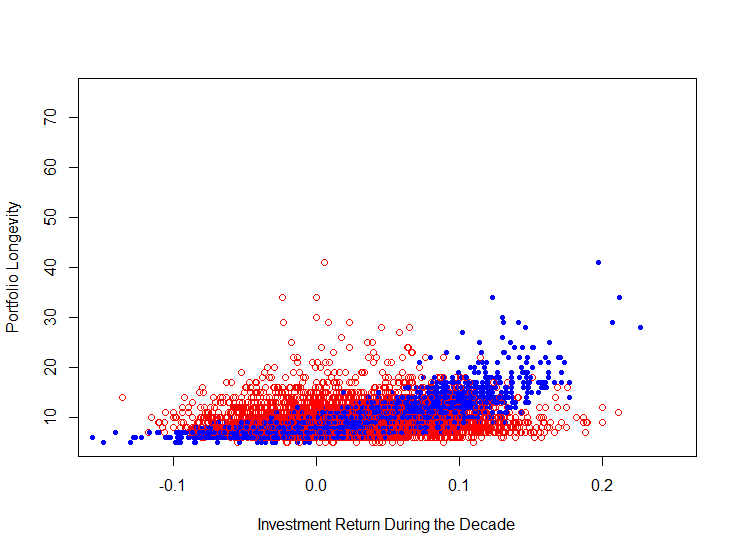
10年間のリターンとPLの相関を計算すると，最初の10年間ほど高く，徐々に小さくなっていく．ただしこれは消費額にも影響を受ける．

・消費を小さくすると最初の10年間の影響は小さくなるが，30年間の影響は大きくなる．

・消費を大きくしても最初の10年間の影響は小さくなるが，30年間の影響も小さくなる（消費率が高いとリターンに関係なくPLは小さくなるので）．

## Visualizing the Correlations

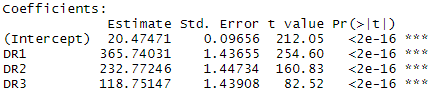
6.4の内容をプロットする．青の結果が最初の10年間，赤の結果が20~30年．相関構造が悪化していることがわかる



## A (Simple) Linear Regression Model

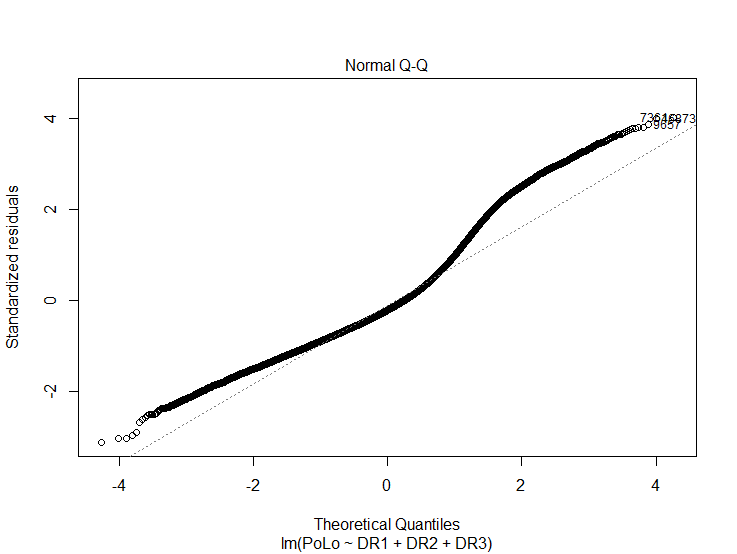
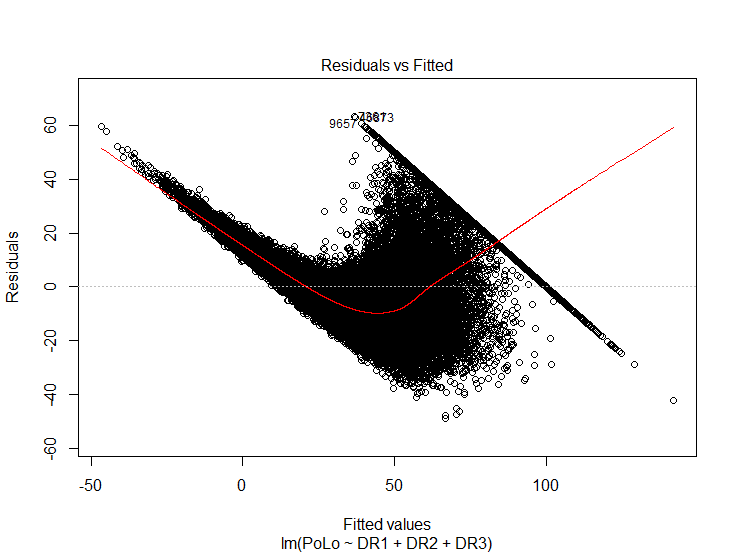
ポートフォリオの寿命ベクトルを30年間のリターンを表す3つのベクトルで線形回帰する．

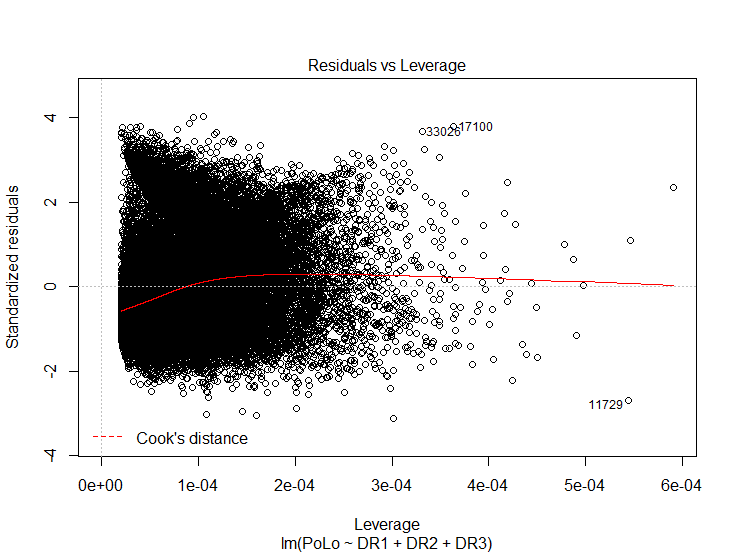
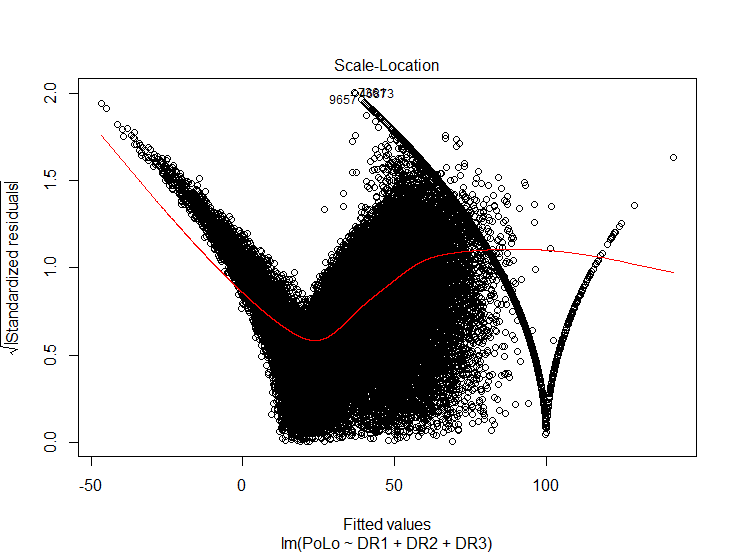
切片は約20年であり，なので妥当．最初の10年間のリターンが1%増加すると3.65年寿命が延びる．20~30年リターンが1%増加数rと1.18年延びる．



## Regression Diagnostics

ポートフォリオの寿命とリターンの関係が線形ではないことを視覚的に確認する．Rの線形重回帰によってプロットできる4つのグラフを確認する（Residuals vs Fitted，Normal Q-Q，Scale – Location





## Logistic Regression: Will the Portfolio Last 30 Years?

下記のロジスティック回帰を適用する．



## Extending Portfolio Longevity with Derivatives

コール，プットオプションを使用して，sequence-of-returns riskをリスクヘッジできるか検討する．

ドローダウン（retirement income）フェーズの早い段階において，投資収益率の影響が大きいことを明らかにする．これはsequence-of-returns riskと呼ばれ，実務家はこのリスクをヘッジするため ，年金商品を推奨する（Guaranteed Living Withdrawal Benefits (GLWBs) and Guaranteed Minimum Income Benefits (GMIBs)）．

また，インフレ連動債やレバレッジドETFを使用して動的ALMを行う．

コール，プットオプションを使用することで，ポートフォリオの寿命における，ドリフトは減少するが，拡散係数も抑えることができる．具体的には，コールを売ってプットを買うことで最低リターンを保証するが，上限も抑えられる（参考文献では過去データを使用してリーマン期の影響を確認）．

この本では，アウトオブザマネーのコールを売って，アウトオブザマネーのプットを買う．コールオプションの行使価格はプットのプレミアムに合わせ，0コストになるようにする

結果としてポートフォリオの寿命を延長させることを確認．

## Final Notes

・この章では，消費額が一定という非現実的な戦略の下で分析したが，それを推奨するのではない．ここでのポイントは，（1）投資収益に対するポートフォリオの寿命の感度を調べ，（2）いくつかの背景を提供し，保護ベースの戦略の正当化，および（3）成功率と失敗率をシミュレートする人がそれを適切に実行することを確認

・線形重回帰，ロジスティック回帰にかかわらず，投資収益の影響は非線形であり，収益に対する感度は最初の10年間が大きい（sequence-of-returns effect）

# Modeling Human Longevity and Life Tables

人間の寿命とポートフォリオの寿命の不確実性またはランダム性に焦点を当て，人間の死亡率データベースからのコホート生命表の詳細な説明と分析を行う．コホート生命表から人口の生存率と死亡率を抽出し，生命表を再構築する．最終的には対数死亡率に線形関係を仮定し，予測する．

## Functions Used and Defined

## Death for Financial Economists: Motivation

これまでは，生と死はアクチュアリー，資本管理は金融実務家に任されていた．しかし，ライフサイクルモデルを理解する上で年金の公正価値や長寿保険の役割を理解するため，アクチュアリーと建設的な会話をするためにも生死を理解する必要がある．

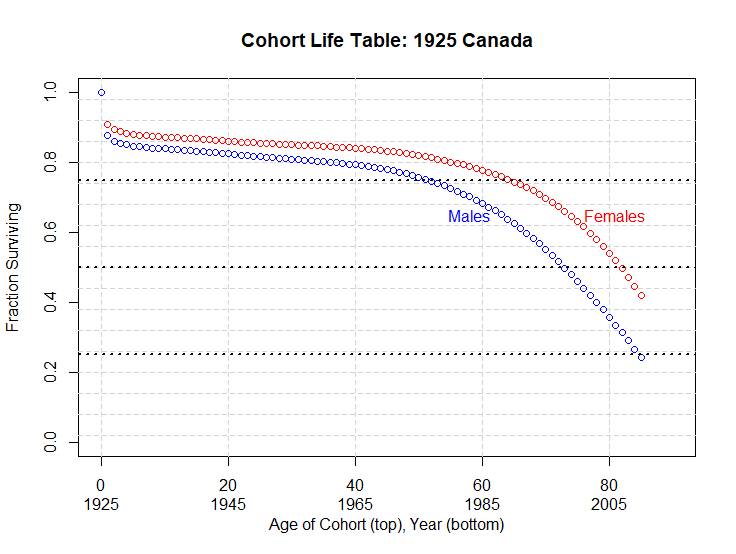
## Will You Live to Age 100?

まずは100歳まで生きるかがどうかを考えているが，大したことは言っていない．

## The Human Mortality Database (HMD)

Human Mortality Databaseからカナダで1925年に生まれた（1月1日生まれと仮定）男女各100,000人のコホート生命表のデータを確認し，各年齢の生存率をプロットしてみる．女性の方が生存率が高いこと，乳幼児の死亡率が高いことなど言及．

コホート生命表：同じ年に生まれたグループ



## Cohort Survival Rates from Life Tables

コホート生命表をさらに分析．各年齢の生存率を計算し，2020年度と構造が異なることを言及（乳幼児の死亡率や戦争の影響だと思われる）

特定の年齢まで生存している条件付き生存率を計算し，0歳からの生存率よりも改善することを確認．

## Another Birth Year: Another Cohort

1925年生まれとの対比として，1940年生まれのコホートを確認．1940年の生存率が高く，死亡率が低下していることを確認．一方で，2010年と2020年で同様に低下傾向にあるかは議論されている（先進国ではもう既に乳幼児の死亡率は変化していない）．

重要なことは，（1）生まれた年と（2）条件付け年齢を認識すること

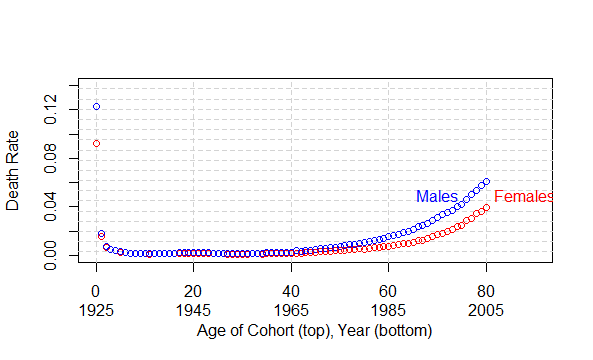
## Extracting Death Rates from Life Tables

生命表から死亡率を計算（生命表はHMDの死亡率から生存者数が計算されている，具体的には，下記で計算されている．）



## The One-Year Death Rate qx

1年間の死亡率を計算，プロット．ほぼすべての国で下記のような形状



## Reversing the Process: From Death Rates to Life Tables

死亡率から生命表を再構築する．

生命表を計算する理由としては，1年間ではない死亡率を計算するのが楽だから．



## Death Rates and Survival Rates: n-Years

1年ではなく，n年間の死亡率を考える．

x歳まで生存し，n年後に死亡する割合は下記で計算する．



## A First Look at Natural Laws Governing Death

1925年生まれの結束データである86歳以降の死亡率を予測するため，35歳以降指数関数で増加すると仮定．

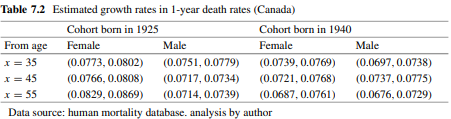
死亡率の成長率ををすると，歳の死亡率から歳の死亡率は下記式．



両辺対数をとると，対数死亡率は線形であることがわかる（実データからも仮定が妥当であるとわかる．次章で数学的証明）

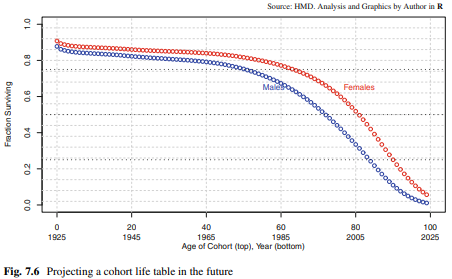


線形回帰で死亡率の成長率の信頼区間を求める



## Projecting Survival Rates to Age 100

7.11に続き，対数死亡率に線形を仮定し，推計した成長率から86歳以降の死亡率を計算し，生命表を作成．



## Final Notes

・この章で扱ったのは確率ではなく，割合であり，次章で確率変数を扱う

・HMDから取得できるデータは死亡率なので，生命表は別途作成する必要がある．データは期間ではなく，コホートで取得すべき

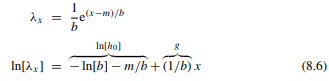
・死亡率は特定の年度に生まれたコホートに対する死亡率であることに注意

# Life and Death in Continuous Time: Gompertz 101

確率変数を定義し操作する．

様々な連続時間の1年死亡率である死亡ハザードレートを基に確率変数を定義，ベンジャミン・ゴンペルツの死の法則を導入する．

ベンジャミン・ゴンペルツの死の法則：ハザードレートに指数関数を仮定



## Functions Used and Defined

## The Calculus: Survival Probabilities from Hazard Rates

連続時間での死亡率を定義する．

時点までの生存率を連続関数と定義すると，

式(8.3)の両辺を積分し，



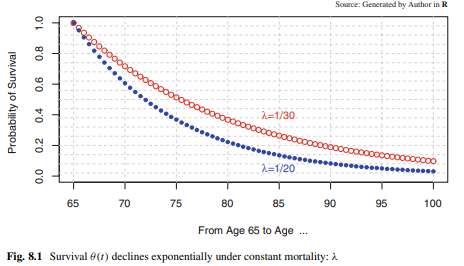
## Constant Mortality and Exponential Lifetimes

ハザードレートとして指数関数を定義する妥当性を確認するため，まずはハザードレートが定数の場合を考える．

まずはハザードレートを定数として，ランダムな寿命を構築する．



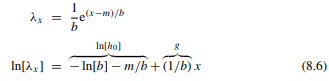
このとき生存率の推移をプロットすると，下記のように凸状になるが，7章で実際のデータでは凹状であった点にフィットしていない．それゆえ，よりよいモデルが必要．



## The Gompertz Law of Mortality

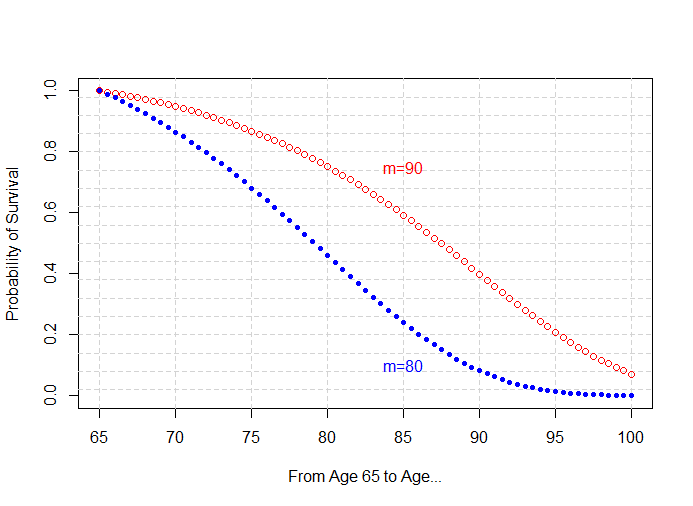
ハザードレートを線形に仮定することは非現実的なので，指数関数を仮定する

単純に定義すると，となるが，ここではパラメータを変え以下のように定義



このように定義すると，下記として解くことができる（パラメータmは分布の最頻値（年単位），bは分散（年単位）係数を表す）．この仮定をゴンぺルツ仮定と呼び，まずは直感的な理解を行う．





mが小さいほど，生存率は急速に低下する（mは分布の最頻値なので直感通り）

期待値と最頻値が異なることを確認．

また，期待値と標準偏差は下記のように書けることが知られている．



## Simulating Human Lifetimes

投資収益率を確率変数としたうえで，寿命も確率変数としてシミュレーションを行う．

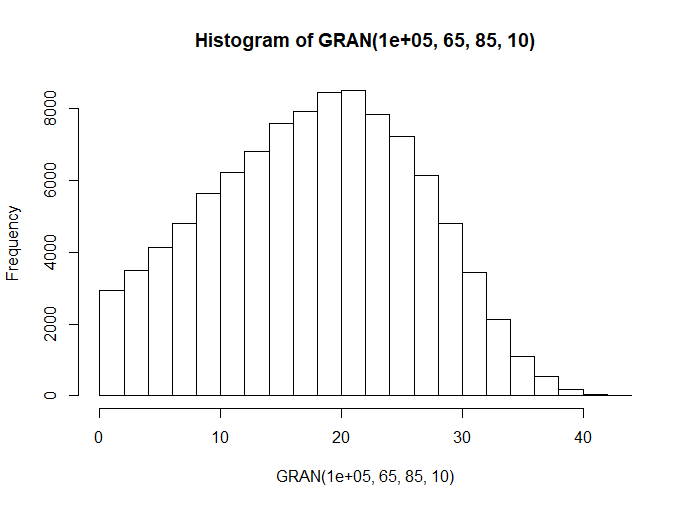
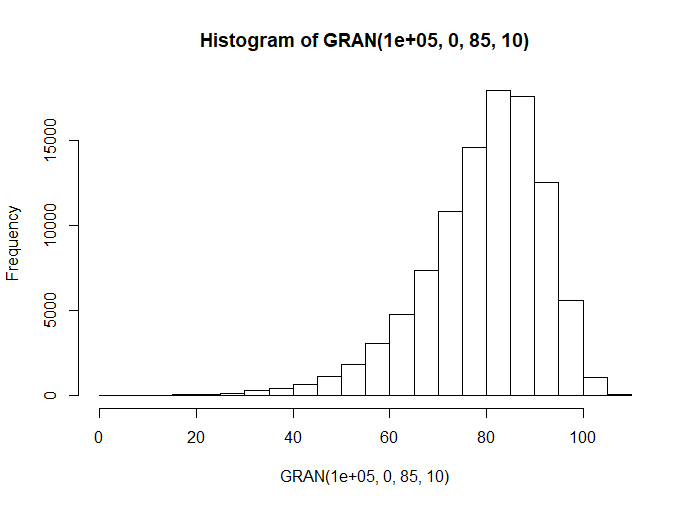


この式を変形すると，



それゆえ，生存確率が与えられればその時点を計算できるので，を一様分布としてシミュレーションする．すると，はゴンペルツ分布となる．

0歳と65歳を条件としたゴンペルツ乱数を生成してみると，下記のように分布が異なる．このことから，条件付きの生存率を求めることが重要であるとわかる．

## Gompertz Experimentation via Simulation

様々なパラメータの下でゴンペルツ乱数を生成し，(8.9)の近似の精度を確かめる．

## Cohort Life Tables from Random Lifetimes

ゴンペルツ乱数をシミュレーションし，生命表を作成する．そして，1年死亡率を計算する（当然ながら対数をとると線形）．その対数死亡率を線形回帰すると，(8.6)式で設定した値に近い値が得られる（当然ではあるが）

## Simulating Joint Gompertz Lives

これまでは単身者を想定して考えていたが，カップル2人を考慮したゴンペルツ乱数を生成する．

最頻値が異なり（男80女90），互いの生死が独立（実際には独立ではないが）と仮定を置き，女性の方が何年長生きするかシミュレーションする．

## A First Look at Calibration

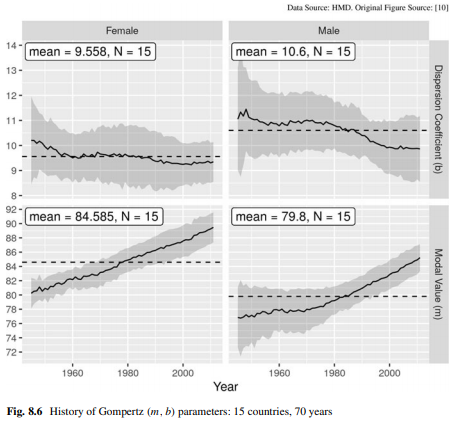
ゴンペルツ分布におけるパラメータのカリブレーション．

具体的には，ゴンペルツ分布による解析解とシミュレーションによる数値解の絶対偏差の和を計算し，最小化する．

シミュレーションした生命表および実際のデータに適用してみる（分散係数はインプットで1変数最適化）

HMDより推計した各パラメータの推計結果は下記図．影は2σ．

2変数最適化は後章で紹介とのこと．



## Final Notes

・ベンジャミン・ゴンペルツの主な貢献は死亡率が指数関数で表せることであり，積分により生存率を計算できること，さらにマケハムがゴンペルツの法則を修正し下記のように定式化した．



・マケハムは，死亡率が一定によって増加することが，エイズや戦争などの要因を考慮できていないとして，定数をノイズ項として加えて定式化した（13章で扱う）．

・ゴンペルツは学者ではなく，実務家

・ゴンペルツの法則は若いころには機能しない．また，90歳以降など，超高齢の生存率は過小評価する（ある一定の年齢で死亡率は増加しなくなる）．

# The Lifetime Ruin Probability (LRP)

寿命のリスクを考慮した下で，様々な退職所得戦略のsuccess rate, failure rateを計算するポートフォリオの寿命に関するアルゴリズムに焦点を当てる．

## Functions Used and Defined

## Exponential Living to When the Money Runs Out

5章より，初期金融資本を，固定金利を，1年当たりの消費額を（）としたとき，ポートフォリオの寿命は下記式となる．ただし，のとき，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9.1) |

(証明)

ポートフォリオの寿命は金融資本の現在価値と消費系列の現在価値が等しくなる年数であるため，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

のとき，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

のとき，となるが，これは十分といえるのか？

⇒ 退職する年齢に依存（70歳なら十分である可能性はあるが，55歳であればおそらく不十分）するし，Yes，Noでこたえられる問題ではない．

⇒ ポートフォリオの寿命を生きる確率で表現すべき

そこで，まずは単純な例として，余命がハザードレートの指数分布に従うと仮定する．

このとき，生存率は

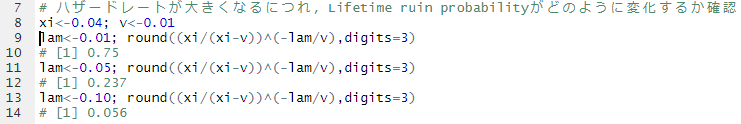
|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

となるので，(9.1)より，Lifetime Ruin Probability(LRP)は下記式で定義される．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ただし，のとき，

このとき，ハザードレートがLRPに与える影響を確認すると，ハザードレートが大きくなるにつれてLRPは小さくなる（早期に死亡する確率が高くなるので）



余命が指数分布に従うと仮定しているので，期待値と標準偏差はなので，明らかではある．しかし，現状の仮定は，寿命が指数分布，一定のリスクフリーレートを取得するとしているので，次節以降では，ゴンペルツの法則等を考えていく．

## Gompertz Living to When the Money Runs Out

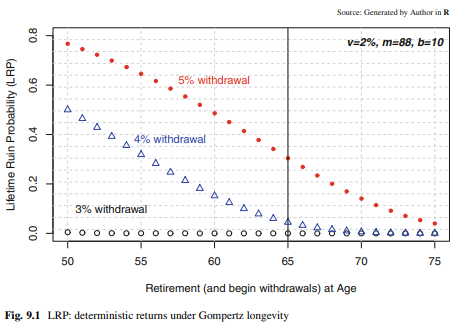
　この章では，ハザードレートとしてゴンペルツ分布を仮定し，決定論的シナリオの下で感度分析を行うことで洞察を得る．

次にハザードレートとして，ゴンペルツ分布を仮定してLRPを導出すると，8.4節のの定義より下記式となる．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

この式をRで関数として，様々なパラメータで試してみる（評価率，退職年齢：減少関数，ゴンぺルツパラメータ最頻値，分散係数：増加関数）導関数は自身で計算しろとのこと．

支出率，退職年齢に関してLRPをプロットしたのが下記図．直感通り．



## Analytic vs. Simulation: How Many?

　LRPを解析的に求められない場合には，人間の寿命それぞれをシミュレーションすることで数値解を算出するひつようがある．ここでは，ポートフォリオの寿命は決定論として，人間の寿命をシミュレーションする．

* ポートフォリオの寿命（決定論）

9.1節の9.1式

* 人間の寿命のシミュレーション

8.5節より，

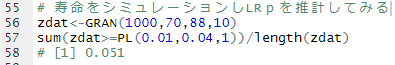
|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

となるので，変形すると，

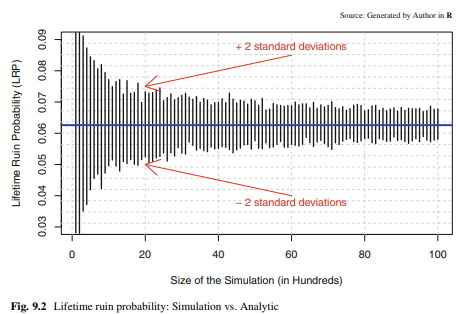
|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

この式における，に一様分布を仮定してシミュレーションを行う．

下記のようにLRPは5.1%となったが，真の値6.26%とは乖離している．原因はシミュレーション回数だが，実際には真の値がわからず，何回シミュレーションすべきかわからない．



シミュレーション回数を増やして，精度を確認してみる．



シミュレーション結果からの示唆としては以下の通り

1. ある程度，シミュレーション回数を増やせば変動は小さくなるが，完全に0とはならないので，シミュレーションする場合には範囲を示すべきである．
2. LRP等をシミュレーションする場合，小数点以下2,3桁を重要視しないのであれば，シミュレーション回数として極端に大きな値をとる必要はない．

## Stochastic Portfolio Returns

* これまでに行った仮定

・一定の支出率

・固定の投資収益率

・年金による収入を考慮しない（10，11章で考慮）

この章では，人間の寿命に加え，投資収益率についても確率的に変動させ，シミュレーションを行う．

* ポートフォリオの寿命のシミュレーション

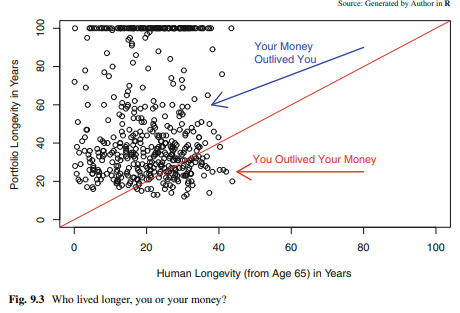
投資収益率に正規分布に従うと仮定し，時点における金融資本を以下のようにシミュレーションする．そして，0が0より小さくなった時点をポートフォリオの寿命とする．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

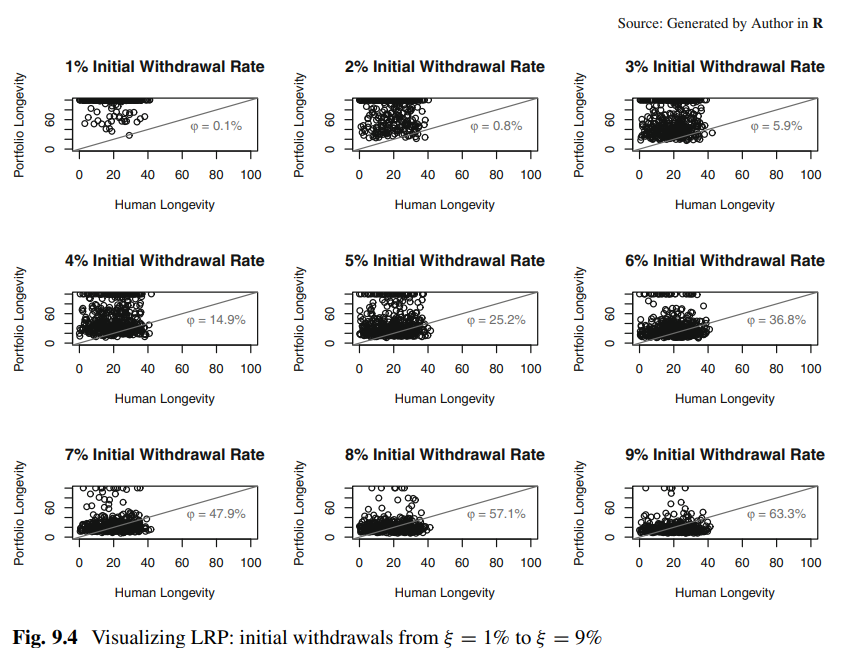
シミュレーション結果を図示したのが下記．

・赤色の対角線より上が破綻しない場合であり，大半は同結果となる

・対角線より下の割合は約15%程度 ⇒ ポートフォリオ保険が重要であることの根拠



さらに消費率を変更してシミュレーションをすると下記の通り．この結果は，退職年齢65歳，ゴンペルツパラメータ：最頻値88歳，分散係数10，投資収益率：期待値2.5%（実質），標準偏差15%を仮定しているので，設定に応じて変化させる必要がある．



## LRP by Simulating Stochastic Present Values

LRPを推計する方法としては，下記3パターンが考えられる．

1. 解析解による導出

<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.493.8414&rep=rep1&type=pdf>

1. 近似による手法

モーメントマッチングの概念を使用（9.7節で紹介）

1. シミュレーションによる推計（9.5節までに紹介）

* ポートフォリオの収益率に関するシミュレーション深掘り

ブラウン運動をとし，収益率の期待値，標準偏差とすると，ポートフォリオの価値は下記式で書ける．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ここで，の確率微分方程式はよく知られた形式として，下記式となる．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

このとき，金融資本に関する確率微分方程式は下記（：初期金融資本，：引き出し額）・

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

この式の解は

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ポートフォリオの寿命はとなる時点であり，LRPは同時点が余命よりも小さい場合なので，を利用して変形すると(は確率変数)，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## LRP by Moment Matching

がガンマ分布で近似されることから，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

：shape parameter，：scale parameterであり，平均は，分散は

このとき，LRPは下記のように書けるので，のモーメントをthe Reciprocal Gamma distributionを合わせる．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## Final Notes: Concerns with Ruin

・LRPは1世紀にわたって負債と保険会社のリスクを計測するのに使用してきたが，近年，個人金融，資産管理および退職後の収入管理に使用されるように移行した．

・LRPに関する課題の一つは，一定の消費額を想定していることであり，現実的に即していない．

・LRPの適切な水準とは？1%の減少に大きな意味はある？

・LRPが同じ水準であれば，各戦略に無関心でよいのか？実際には同じLRPでも確率分布によって選好は異なるため，分布で考える必要がある．

・各仮定はあくまで予測しているにすぎず，COVID-19等不測の事態が起こりうるので注意が必要である．

# Life Annuities: From Immediate to Deferred

　DB年金の一部である，一定のCFを評価するための方法論に関して紹介．具体的には，即時，一時，繰延年金について．ゴンペルツモデル以外のモデルも紹介するが，最終的にはゴンペルツモデルの下での年金評価モデルの解析解を導出する．

## Functions Used and Defined

## Actuarial Present Value (APV)

　資金が尽きても生きているリスク，長寿リスクに焦点を当て，長寿年金のアプローチを紹介．

　古典的DBではインフレ調整された年金を生涯にわたって給付する．年金が保険会社から購入したものであるとすれば，受給者にとって望ましければより多く購入する．一方，保険会社は多くの年金受給者をプールすることで長寿リスクをヘッジする．さらに独自の価格設定アルゴリズムを使用することで，受給者にとっては公平性がある，保険会社にとっては安全性のあるバランスが取れた価格設定を行う．

　現在，多くの年金商品が開発されているが，ここでは単純な生命年金に焦点を当て価格評価を行う．

　保険会社には規制や財政的摩擦が多くあり，それらを考慮していない見積もりを推計することに過ぎないことに注意．

　まずは単純な1年生命年金のactuarial present value (APV)を考える（実際には販売されないが）

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## Single Premium Income Annuity (SPIA)

　即時生命年金（購入後すぐにCF発生）の価値を評価する．

ゴンペルツの法則より示した通り，死亡時点は

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

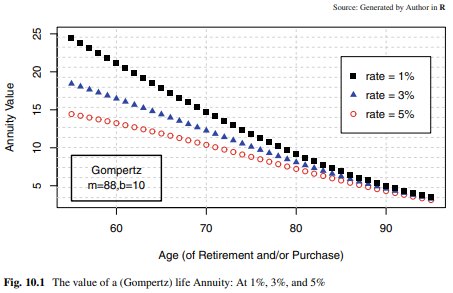
を使用して受給者の最大生存年齢はを代入して，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

テキストには直接定義されていないが，Rのコードより即時生命年金の価値は下記式となる．なお，CFの発生は週次であるとしている．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

ここで，年金購入時点および評価率と年金価値の関係は下記となる．



考察としては，

・評価率に関係せず，年金購入時点が高齢になるにつれ価値は0に減衰する．

・年金購入時点が早いほど評価率の影響は大きくなる．

（・ゴンペルツパラメータも影響する）

補足的な内容として，の評価式において，とすることで生存年数の期待値(8.8)式と一致する．

⇒ であれば即時生命年金の価値は生存年数の期待値より小さくなる！つまりそれ以上の価格であれば払ってはいけない．

## Alternative Paths to GILA

　10.3では離散による即時生命年金の価値を評価したが，積分によって評価する．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

さらに，評価率はこれまでは一定としていたが，期間構造を持たせることも可能．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

生存率により複雑な関数を使用可能，この章の最後や12章で扱う．

## Temporary Life Annuity (TLA)

　一時年金（最大年数が固定）の価値を評価する

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## Deferred Life Annuity (DLA)

　据置年金の価格評価式を紹介する．

10.5で紹介した一時年金は年金期間を超えて長生きするため，長生きリスクをヘッジできずお勧めされない．むしろ，据置年金の価格を評価するための構造として紹介した．

　生命年金には下記3つのタイプの年金が存在する．

1. Immediate Life Annuity (ILA)

即座に年金支払いが開始し，死亡時点まで給付が続く

1. Temporary Life Annuity (TLA)

即座に年金支払いは開始するが，死亡時点もしくはあらかじめ設定した時点まで給付が続く

1. Deferred Life Annuity (DLA)

据置後に年金支払いが開始し，死亡時点まで給付が続く

したがって，下記の関係式が成り立つので，下記関係よりDLAの価値を評価する．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

また，積分によっても下記のように評価可能

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

週次による離散と積分による連続の評価を紹介したのは，読者に場合に応じて選択できるようにするためのよう．現実には実際の給付感覚に合わせて評価式を組めばよいと思われる．

## Annuity Formula Applications

### DB Pension Buyout

　DBの給付金を年金で受け取るか，一時金で受け取るかを比較する．

・年金の現在価値を計算し，一時金と比較

・年金の現在価値と一時金が等しくなる評価率をニュートン法で計算

・一時金で受給し，自身で年金を複製した場合のポートフォリオの寿命，LRPを算出

### DB Pension Reserves

年金基金側が給付に向け，どれだけ準備金を積む必要があるかを計算．

　現在，45歳で給与75,000$， 2でこれまでに10年働いている．将来の年金額は「給与×勤続年数×0.02」で計算され，65歳で受給開始として，現時点で必要な積立金の価値はいくらか．

⇒ 現時点では，75,000×10×0.02=15,000$の年金が65歳より発生するDLAの現在価値を計算すればよい．

### DB Pension Funding

　年金加入者の拠出の価値を評価する．

　年金加入者の拠出は一時年金とCFと同じになるので，同様に評価できる．

即時年金が期間固定の年金（志望考慮なし）と比較して安価であることを示している（その代わりに遺産は残らない）

### DLA with COLA

　これまで，インフレを考慮していなかったが，インフレを考慮した一つの例として「a pre-determined cost of living adjustment (COLA)」を紹介する．

　年金の支払いが名目（実質）であれば，評価率も名目（実質）であることが多いが，場合によっては名目と実質を組み合わせることがある．それがCOLAである．COLAは事前に設定された調整率によって給付額が調整される，繰延年金である．そのため，支払いが開始される年齢を，cost of living adjustmentをとすると，年金係数は下記式．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## Life Annuity with Period Certain

　死亡後も遺族への給付が一定期間保証されている年金を考える．

　保証期間をとすると下記式になり，即時年金と比較して保証期間分価格は高くなる．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## Joint Life Annuity with 100% Survivor Benef

　カップルのどちらか一方が生存している限り支払われる年金を考える．

　生存率をカップルの生存率とすればよいので，一方の生存率を，もう一方をとすると

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

ここで，両者のゴンペルツパラメータをそれぞれ，とすると，下記式となり，単一の生命年金よりも高価となる．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

## Analytic Expression for Gompertz Annuity

　ゴンペルツ年金係数の解析解を導出する．

　ゴンペルツ表現のハザードレートをゴンペルツマケハムの死亡法則に拡張する．はマケハム係数．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

：偶発的な死亡を捉えるパラメータ

：最頻値

：分散係数

このとき，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

：標準化された年齢

現在，歳で年後に年金開始，年後もしくは死亡時点まで給付される年金は

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

このとき，変数変換として，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

いったんこの先省略．

## Final Notes: More Risks

・年金はリスクフリーの商品ではない（年金会社がデフォルトリスクなどにさらされている）

・この章で導出した価格は近似値であり，実際の価格とは一致しない（コスト？金利期間構造の変動は遅延して反映される）

・年金の最適購入戦略は参考文献，3,8を参照．

# Intelligent Drawdown Rates

　動的な支出率（Intelligent Drawdown Rates）を計算するアルゴリズムを紹介

## Functions Used and Defined

## Preferences for Retirement Spending

　退職後の支出について言及．予期される計画と予期しないシナリオに適応するレシピを紹介．

　授業内で学生がどのように消費を割り当てたかを紹介．その結果，参加者間の異質性を下記2つとして紹介．

1. 主観的割引率
2. 長寿リスク回避度

　それに加え，重要な要素として

1. 年金収入

プールすることの大切さも言及（トンチン年金の考え方？）

## A Crash Course on Utility

　インテリジェントドローダウンを導入し，導出アルゴリズムを紹介する．

1. 主観的割引率

気分，性別，国籍によっても異なり，以下3パターンが考えられる．

・：relatively impatient

・：neutral

・：relatively patient

測定するのは難しいが，前提として(1)存在すること，(2)退職までにその値を知っていること，(3)に近い値であることを仮定する（問題を単純化したい場合にはとする）．

主観的割引率を基に個人の効用関数を定義する（：年齢，：富，：年金収入）．なお，は長寿リスク回避度でパラメータされた効用関数

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11.1) |
|  |  |

動的予算制約は

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

・the intelligent drawdown rate

後ほどレシピを紹介

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

目的はを計算することであるので，(11.1)の左辺の解析解を求めること．よって，(11.1)の右辺を2つに分解する．はが枯渇する時点Wealth Depletion Time（においてとなる）であり，intelligent drawdown rateアルゴリズムの中核．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

この目的関数に変分法（Calculus of Variations）を用いて解く（割引された生涯効用を最大化する関数全体（消費関数）の検索が含まれ）．ここで，においてとなることを利用し，目的関数を変形すると，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

：年齢，時点で開始する，評価率の年金係数

がより大きいか小さいかを説明する要約尺度として，を定義する．

・：more patient

・：less patient

・：neutral attitude relative to market rates，市場金利を決定する代表的投資家

最後に，の最適な消費は

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

## The Algorithm for Retirement Spending

　11.3で述べたアルゴリズムをRで実装し，感度分析によって各パラメータがインテリジェントドローダウンに与える影響を確認する．

* 年金収入

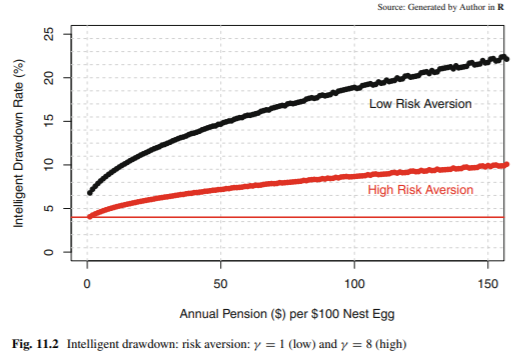
大きくなるにつれ，インテリジェントドローダウンも大きくなる．

将来安定した年金収入を得ることができるので，消費を大きくするため．

* 長寿リスク回避度

大きくなるにつれ，インテリジェントドローダウンは小さくなる．

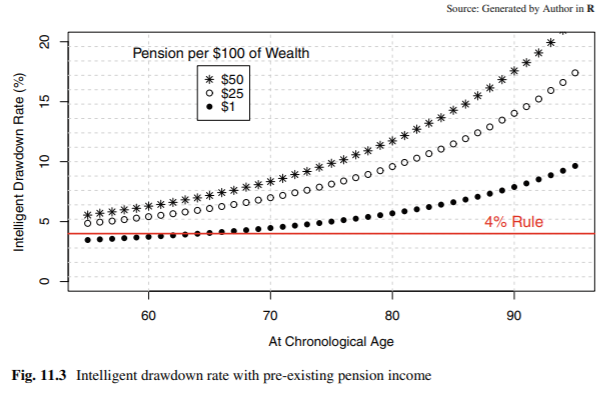
長寿リスクに対する回避度が大きくなるので，消費を減らすため．

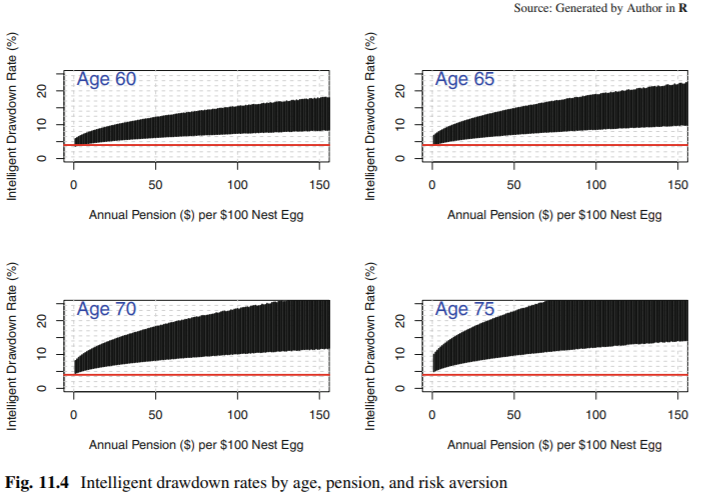


* 年齢

大きくなるにつれ，インテリジェントドローダウンも大きくなる．

年齢が上がることで余命が短くなるので，消費を大きくするため．





* 金利

大きくなるほど，インテリジェントドローダウンも大きくなる．

投資による収益が大きくなるため，消費を大きくしても賄えるため．

* 主観的割引率

大きくなるほど，インテリジェントドローダウンも大きくなる．

直感通り

* ゴンペルツパラメータ最頻値

大きくなるほど，インテリジェントドローダウンは小さくなる．

長生きすることになるので，消費は小さくする（年齢による影響と同一）．

* ゴンペルツパラメータ分散係数

年金収入の水準に依存して変化する．

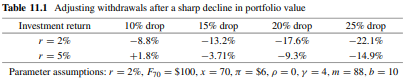
金融資本が枯渇する時点に密接に影響を受けるとのこと．詳細はこの本の影響を超える．

## Intelligent Reactions to Sudden Portfolio Declines

資産の突然の変化に対してインテリジェントドローダウンがどのように変化するか確認する．

初期金融資本が20%減少した場合，インテリジェントドローダウンは16.86%減少する（20%減少しない理由としては，年金収入があるため））

　年齢や市場見通し（金利）の影響も確認．



## Intelligent Drawdown When You Don’t Have a Pension

　年金収入がない場合のインテリジェントドローダウンを計算する．

## Final Notes: What Ingredients Have I Missed?

・この章で導入したインテリジェントドローダウンは投資収益率のボラティリティを考慮していない．

Habib, F., Huaxiong, H., & Milevsky, M. A. (2017). Approximate solutions to retirement spending problems and the optimality of ruin. Available at SSRN, https://ssrn.com/abstract= 2944125 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2944125

・この章で導入したインテリジェントドローダウンはカップル，税金を考慮していない．レベルアップの余地

・この章で導入したインテリジェントドローダウンは遺産動機を考慮していない．

# Pensionization: From Benefits to Utility

DB年金制度の経済的根拠，メリットを紹介

## Functions Used and Defined

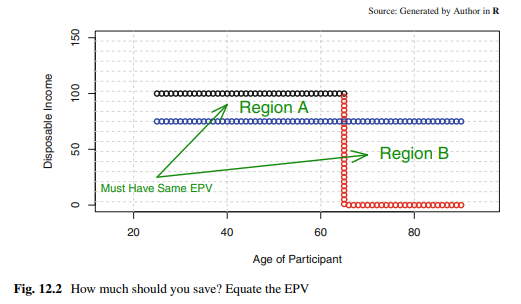
## The ABCs of Gold-Plated Pensions

　Gold-Plated Pensions（GPP）について説明し，collective pension plans, versus the (do-ityourself) plansを比較する．

　GPPは生涯一定額消費し，勤労期間に蓄積した貯蓄を退職後に消費する計画であり，下記図のようにRegionAとRegionBの面積が等しくなるようにする．ポイントは死亡時点が既知であるということ（現実的ではない）．

　具体的な貯蓄額は下記式を満たすとして導出可能である．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |



　上記のGPPは死亡時点がわからなければならず，現実的でない．そこで，重要となるのが集団DB年金制度．

* 集団DB年金制度のメリット

・死亡時点を推計する必要がなくなるため，コストの削減につながる

(expensive) term-certain annuities can be replaced with (relatively cheaper) life annuities

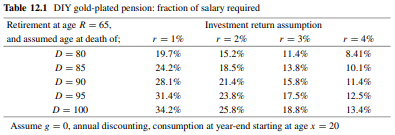
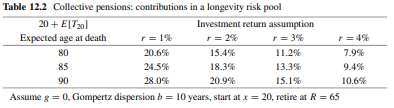
具体的には，GPPにおけるが満たす方程式が，死亡時点を推計する必要のない関数によって以下のように書き換えることができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

各プランに加入した場合に必要な貯蓄率を比較．

DB年金では死亡時点を推計する必要だけでなく，コストも小さくなっていることがわかる．

GPP　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　DB年金

## Who (Gets and) Pays for Gold-Plated Pensions?

　DB年金が有用だと述べる前にデメリットも言及．

・早期に死亡した場合，遺族は一切受け取ることはできない（保証期間を作ることはできるが，拠出額は大きくなる）

・拠出する必要のある金額と，それに代わる消費可能な収入の割合が100％と異なる可能性がある

## What Fraction of Your Balance Sheet is Pensionized?

　DB年金を持つことが有用であることを示したうえで，個人のバランスシートの内いくら年金化すべきかについて言及．

「金融資本＋年金一時金」と「金融資本＋即時年金」それぞれでインテリジェントドローダウンを計算し，年金で持った方が有用であることを示す．

その上で，バランスシートの内いくら年金化すべきか議論するための指標として，個人のバランスシートの内，年金化された資産の割合を下記式で定義．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

GILA(x, v, m, b) ：即時年金係数

変形すると，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

との値がわかればがわかるので，の値を知ることは重要（具体的な水準に関する議論は後程）

## Deep Dive into the Wealth Depletion Time (WDT)

WDTとの関係に着目し，分析．

の値はインテリジェントに）富を引き出す速度に影響を与え，富を枯渇させるために目標とする時間（または年齢）を決定する．

具体的には，WDTは富が枯渇する時間，つまり，消費となる点を求めればよい．

11.3節より

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

↓

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

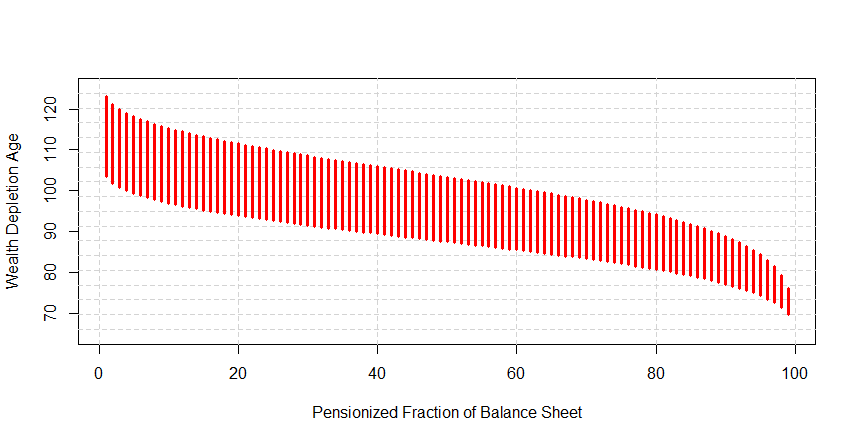
富の枯渇時間を長寿リスク回避度との関数として下記のように定式化し，とWDTの関係をプロットする．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ここで，整理すると，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

が大きいほどWDTは小さくなる（年金による収入があるので，資金が尽きても問題ない）



## What Fraction Should be Pensionized?

WDTをインプットとして与え，とインテリジェントドローダウンを求める．

　これまではWDTは計算の結果外因的に与えられるものであったが，この節ではWDTをインプットとして与え，とインテリジェントドローダウンを求める．

具体的には，となるよう，下記式を解く．なお，である．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

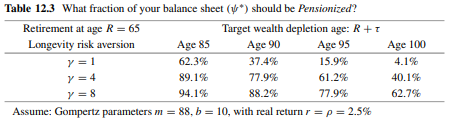
について解くと，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

とWDTに対する年金化割合をまとめたのが下記表．

・が大きくなるほどが大きくなる（リスク回避的になるので直感通り）

・WDTが大きくなるほどが小さくなる（直感通り）



のようにが減算された年齢が出てくる理由について説明．

ゴンペルツ関数より，は

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

よって，下記となり，条件付き生存率を累乗する場合にはのようにが減算された年齢が出てくる．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## A Detailed Client Case Study

12.6までに導入したロジックを用いてケーススタディをする．

実際の顧客を想定し，ケーススタディする．

歳，金融資本ドル，収益率，年金収入ドル，ゴンペルツパラメータ：最頻値，分散係数，リスク回避係数，主観的割引率

↓

現在の年金現在価値は402482.8，この値から．また最適なを求めると，と乖離している．その乖離分を埋めるには，下記式のように現在価値だけ年金を購入する．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

よって，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## The Utility of a Pension Annuity

年金化による収入の増加による効用の増加を測定し，年金化のメリットを述べる．

いったん，読まずに飛ばす．

## Final Notes

・参考文献を紹介

# Biological (and Other) Ages

死亡率の不均一性に着目．人間の寿命の確率変数Txは時系列の年齢xだけでなく，多くの変数に依存している

## Functions Used and Defined

## A Quick Refresher on Gompertz and Makeham

ゴンペルツ・マケハムモデルに関する概要を復習する．

ゴンペルツモデルでは，下記式のようにで表される死亡ハザード率は，で表される最後の可能な年齢まで、成人期に指数関数的に（の割合で）増加すると仮定する．

言い換えると，対数死亡率は年齢とともに線形に増加し，勾配はとなる．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

上記式において，を解くと，2倍になるまでの時間を計算できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

ゴンペルツ・マケハムモデルでは，年齢に依存しない偶発的なパラメータを追加（実データへのフィットをよくする目的）し，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

このように変形することで，平均，標準偏差も近似できなくなり，はの最頻値ではなくなることに注意．

ここで，両辺からを引き，対数をとることで，下記式となり，：総ハザードレート，：生物学的ハザードレート（年齢に依存しない部分を控除）と解釈できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ゴンペルツ・マケハムモデル（GMモデル）の下で，生存確率は

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

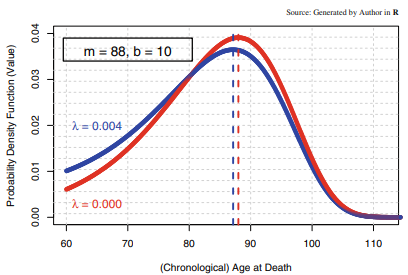
比較用として，ゴンペルツモデルでは

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

GDMモデルにおける累積分布関数をとし，確率密度関数は

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

確率密度関数を利用して最頻値を比較すると



一方，期待値は

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

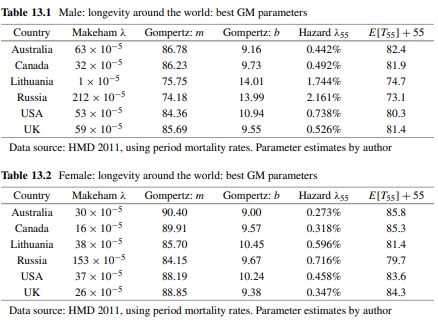
が余命の期待値に与える影響を確認．

⇒ と比較して影響ははるかに小さい．

全ての国，人によって同一のを使うことは正しいのか？

## Mortality and Longevity Around the World

各国の生命表から国ごとの影響を確認．



・いずれの国においても，女性の方が男性よりも平均余命が大きい．

・各国を平均すると，であるが，国ごとに差が大きい（平均寿命がロシアとカナダでは大きく異なる）

⇒ 寿命は年齢，性別だけでなく，居住地域にも影響を受ける（国だけでなく，県や州にも影響を受ける）．

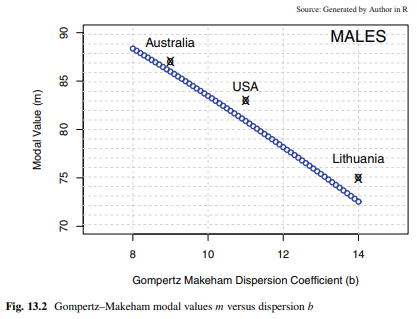
しかし，多くの国の退職年齢は65歳である．寿命によって退職年齢は考えるべきであり，居住地域も重要なファクターとなる．

本当の年齢は死亡率に基づいて定義されるべきである．

## The Compensation Law of Mortality

ゴンペルツ・マケハムモデルにおける最頻値と分散係数が負の相関を持つ関係であるThe Compensation Law of Mortalityについて説明．

The Compensation Law of Mortality：下記図のように最頻値と分散係数が負の相関を持つ関係のこと



図の青線は下記式を満たす点だが，実際のデータにはフィットしていない（ゴンペルツの世界でのとの自然な関係の近似式）．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

実データへのフィットではゴンペルツ・マケハムモデルが適切ではあるが，The Compensation Law of Mortalityは死亡率に関するパラメータを単純化された考えである．

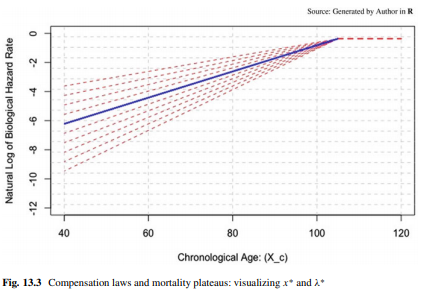
## Mortality Plateaus

が何かを説明する．

ゴンペルツ・マケハムモデルを以下のようにモデル化する．以下の式ではある年齢でハザードレートがで一定と仮定するモデルである．



この関係のイメージは



つまり，

：ハザードレートが一定となる年齢

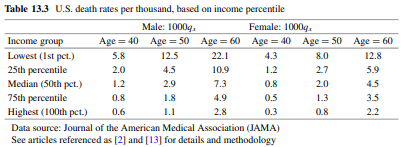
：ハザードレートが一定となった後の値

## Human Longevity: Rich vs. Poor

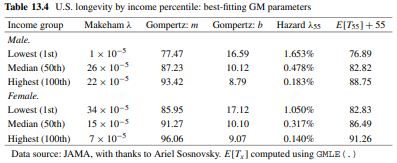
死亡率はゴンペルツ・マケハムパラメータが国だけでなく，収入や富にも影響を受けることを説明．

収入とハザードレートには，Fig13.3同様，負の相関がある．

さまざまな年齢と所得パーセンタイルの関数として，米国の男性と女性の死亡率を示す



収入パーセンタイル毎にパラメータを推計したのが下記．見てわかる通り，不均一性が見て取れる．



## A Longevity Risk Adjustment to Your Age

死亡率に影響するのは年齢だけでなきことを前節までで示したので，相対的な長寿リスクに合わせて年齢を調整する方法を紹介．

パラメータによってリスク調整を行い，リスク調整年齢Longevity risk-adjusted ageを求める．

具体的には，とし，なら若くし，なら年を取るようにする．

をグローバル平均，を国固有の値とすると，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

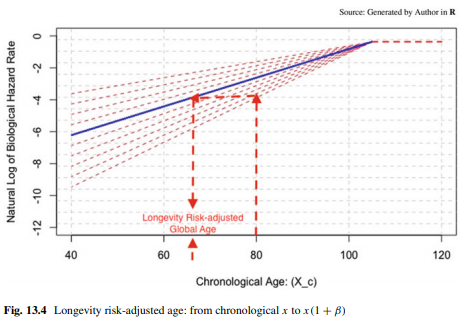
のグローバル平均がマケハム定数（偶発的な事象）の場合，となる．

また，はより遥かに大きいので（がより遥かに大きい），は無視でき，とみなせる．また，は常に正なので，の大小関係に依存．

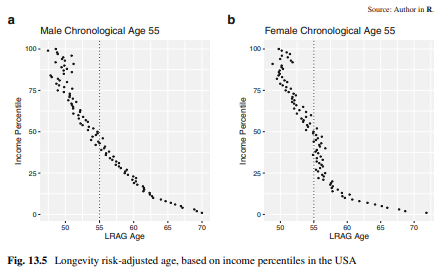
・

・

調整のイメージは下記．



また，収入に応じて年齢を調整した結果が下記



## The Estimation Algorithm

国固有のパラメータを推定するためのRコードを実装．

ロジックはいったん追っていない．データは別途取得か？

## Final Comments

・この章では，退職後の収入計画とは少しずれる内容と感じるかもしれないが，年金化には寿命の分布を考えることは重要．

・参考文献を紹介

# Exotic Annuities for Longevity Risk

株式もしくはポートフォリオのパフォーマンスに依存する生命年金の価格付けに関するレシピを提供する．

a ruin-contingent life annuity (RCLA)：参照するポートフォリオが0になったときにトリガーされる年金

これが退職者にとって望ましいことを示す．

## Functions Used and Defined

## Motivation for Considering Exotics

エキゾチックオプションを考える動機を説明

ポートフォリオの寿命は投資収益率と支出率に依存し，コロナショックのような事態が起きると劇的な影響．そのため，低額な引出し率ではなく，インテリジェントドローダウンが重要．

また，のランダム性から12章で年金が重要であると示した．

人間の寿命は年齢だけでなく，生物学，遺伝学，居住国および富と収入に依存．

ゴンペルツの死亡法則によりはパラメータで表され，健康的な人ほどが大きい．さらに，the compensation law of mortalityより，は負の相関．

生命年金の価格付けを行う上で，これらのを想定する必要があるが，正しいとは？

⇒生命保険会社は保守的にを高く設定するため，が低い人にとって魅力的でなくなる．その結果が高い人だけが加入し（逆選択のような？），生命保険会社はさらに高いを設定する．

結論：生命年金は長寿リスクをヘッジするのに優れているが，非常に高額になる可能性がある．低金利環境下ではさらにそれが悪化．

↓

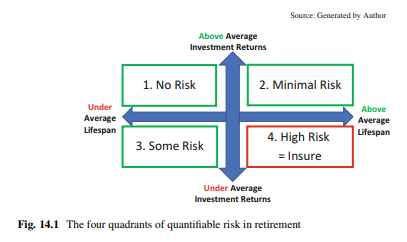
**より安価な代替年金のような商品，別名エキゾチック年金について説明（良い点，悪い点）**

## The Retirement Risk that Really Worries Me

本当に心配すべきリスクとは？

実際のリスクは人間の寿命とポートフォリオの寿命以外にも，医療費やインフレ率等様々あるがここでは無視する（考慮が難しい）

そこで，(1)人間の寿命の不確実性と(2)ポートフォリオの寿命の不確実性に焦点を当て，互いに独立とし，図に表すと，下記．ファイナンシャルプランナーは交点（期待値）で考えるが，金融数学者は不確実性として考えるため，両方のリスクをヘッジする必要がある．



### Four Economic Outcomes

4つの証言それぞれを考え，エキゾチックな年金や長寿年金にどのように関連するのか確認．

右上：もも平均以上．保険によってヘッジする必要なし（高い収益で賄うことができる）．

左上：は平均以下，は平均以上．保険によってヘッジする必要なし

左下：もも平均以下．収益が少ないためある程度リスクはあるが管理はしやすい

右下：は平均以上，は平均以下．これがエキゾチックオプションが必要な理由！！

### Protect Against the Worst Quadrant

2次元で考えることでエキゾチックオプションが必要になる理由を説明．

生命年金の議論では1次元の寿命に焦点を当てた．

年金：右側は保護できる

プット：下側は保護できる

それぞれ単体では余分なヘッジが生まれ，高価となる（年金なら右上等）．

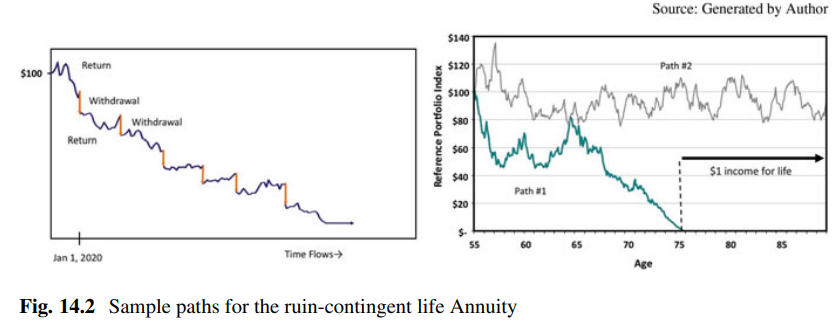
⇒ market-contingent longevity insuranceを考える

## Introducing Ruin-Contingent Life Annuities (RCLA)

Ruin-Contingent Life Annuities (RCLA)を導入する．

繰延年金は一定期間後に年金が支払いされる商品であり，右側全体はヘッジできるものの，繰延期間に資金が減額した際に年金が支払われる年金はより優れた商品となる．

⇒ 事前に指定された年齢ではなく，ポートフォリオ（reference portfolio index (RPI)）の破産時間でトリガーされる繰延年金．引出し率はインプットでそれにより価格が決定．



パス1では75歳より年金が開始し，パス2では生涯開始されない．

## Some (Advanced) Valuation Theory

以下複雑なのでいったん省略．